JUNTA DE ANDALUCIA
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN

QUINTA MISIÓN... NATURALEZA, ARTE Y MATEMÁTICAS

Introducción

Iccanobif y Nietsnie estaban intrigados, observaban a los humanos y descubrían como se emocionaban ante un paisaje, una flor, un edificio, una escultura, una pintura o al escuchar unos sonidos que definían como música. ¿Por qué esa emoción? ¿Qué podía provocar esas estos sentimientos? ¿Qué tenían en común?

Para intentar descubrir este misterio tomaron...

una flor,

una concha marina,

una foto de un edificio antiguo admirado e imitado

(conocido como el Partenón)

una reproducción de un retrato ante el que los humanos se quedaban absortos, parece ser que era conocido como **La Gioconda** o Mona Lisa,

y un instrumento musical conocido como violín...

Después de múltiples observaciones, de experimentar con sus imágenes, se dieron cuenta de que, curiosamente, la respuesta podría estar en.... ¡eureka!.... **las Matemáticas**.

Cada una de estas figuras **contiene en su estructura una misteriosa relación matemática**. Al dividir entre sí ciertas medidas clave de sus elementos obtenemos siempre **el mismo número: 1,618...** Y esto sin tener en cuenta la escala de la imagen, ni el patrón elegido.

Este número "mágico" también se puede escribir de esta forma: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

¿Qué no lo entiendes? No te preocupes, **a lo largo del tema veremos muchos ejemplos...**

Un toque histórico

¿Sabrían los humanos la existencia de esta pauta matemática? Buscaron información y... ¡Claro que lo sabían!

Esta proporción era bien conocida y utilizada en sus obras artísticas de cualquier época. Se denominaba **número de oro**, **razón áurea** y hasta **divina proporción**.

Otro nombre para definir esta proporción era **phi (φ)**, en honor a un gran escultor y arquitecto griego de la antigüedad llamado **Fidias** (principal exponente de la época más gloriosa de la Atenas clásica).

Para saber más...

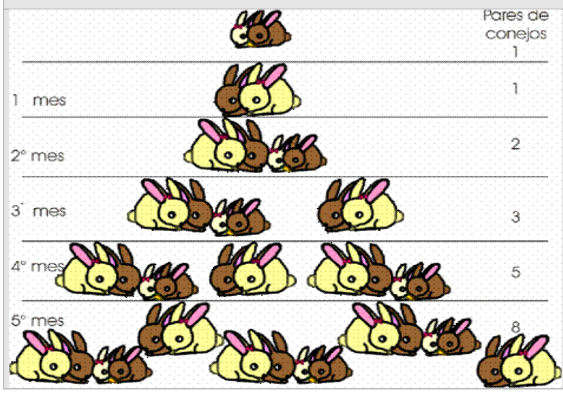
Si quieres conocer un poco más la vida y obra de Fidias, lee el documento "***Fidias***" que encontrarás en el apartado de documentación del tema.

Pero, ¡qué casualidad!, también se ajustaba al nombre de un gran matemático italiano de comienzos del siglo XIII, conocido como **Fibonacci** (¿te suena de algo este nombre?, piensa, piensa que quizá ya lo hayas visto a lo largo del tema de otra forma... su verdadero nombre era Leonardo de Pisa), famoso por la conocida **sucesión de Fibonacci**, surgida como consecuencia del estudio del crecimiento de las poblaciones de conejos.

Esta sucesión está íntimamente ligada al número áureo..... ¡Quién podía imaginarse que la reproducción de los conejos encerraba el "secreto" de la belleza!.... aunque, ¿hay algo más bello que la vida?

Los ocho primeros términos de la sucesión de Fibonacci son: **1, 1, 2, 3, 5, 8,13, 21,...**

Comprueba que lo has entendido



1. Pon a prueba tu lógica. ¿Podrías decir cuáles son los dos siguientes términos de esta sucesión?
   a. 25 y 47
   b. 34 y 55
   c. 37 y 52

Sugerencia: observa cómo se obtiene cada término de los anteriores.

Para saber más...

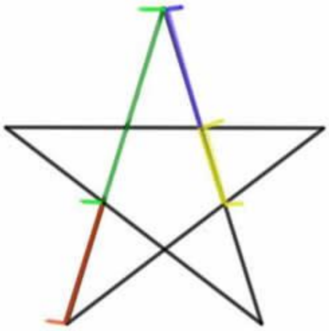
Si quieres conocer un poco más sobre la sucesión de Fibonacci, lee el documento "***Fibonacci***" en el apartado de documentación del tema.

Descubriendo a phi

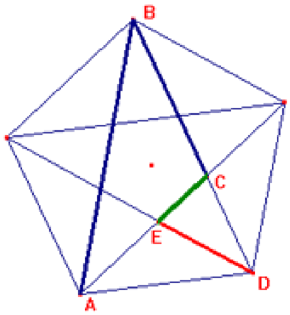
¿Cómo descubrieron Iccanobif y Nietsnie la proporción áurea?

Fijaos en la forma de nuestra flor, es **pentagonal** (cinco pétalos), prácticamente regular (podría traducirse esta regularidad en que los cinco pétalos son iguales en forma y tamaño). Este modelo se ajusta a una figura geométrica conocida como pentágono regular estrellado o **pentagrama.**

En esta representación se han señalado algunos segmentos de distinto color: verde, violeta, rojo y amarillo (para que lo aprecies mejor).



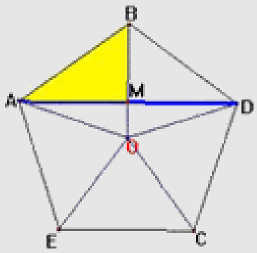
Si dividimos la medida correspondiente al segmento verde entre la correspondiente al segmento violeta dará como resultado 1,618....., igualmente si dividimos la medida del segmento rojo entre el amarillo volverá a dar como resultado 1,618... Este resultado **no dependerá** de si el pentágono es mayor o menor, si la unidad de medida que tomemos (en todo caso siempre la misma) sean milímetros, centímetros, pulgadas o kilómetros. Es una proporción estable y que **siempre dará como resultado 1,618......φ**.



Podemos verlo más gráficamente en esta nueva representación:

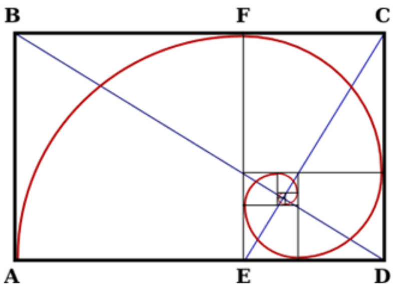
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DE} = \frac{DE}{EC} = 1{,}618\ldots\ldots = \varphi$$

Comprueba que lo has entendido



2. ¿Estarían la diagonal AB y el lado AB de un pentágono en proporción áurea?
    a. Sí, siempre.
    b. No.
    c. Depende del tamaño del pentágono.

Seguimos con el segundo objeto**: La concha marina** conocida también como Nautilus:



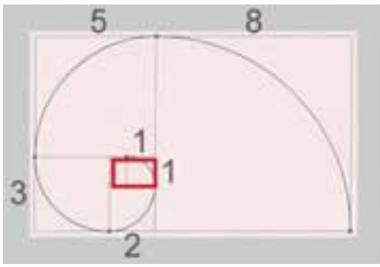
Esta preciosa pieza nacarada, equivaldría a una de las figuras matemáticas más bella, la **espiral logarítmica**. Tomando una representación de dicha espiral logarítmica, o de Durero, podremos observar un hecho curioso:

Está formada por sucesivos rectángulos en proporción áurea, por ejemplo, el rectángulo ABCD es áureo, es decir:

$$\frac{AD}{AB} = 1{,}618\ldots\ldots = \varphi$$

El rectángulo EFCD es igualmente áureo:

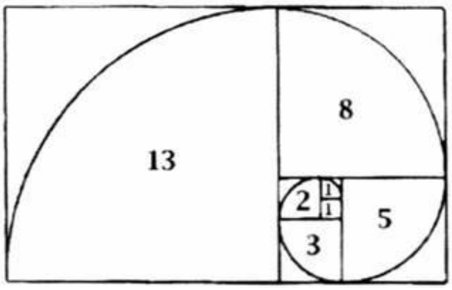
$$\frac{EF}{ED} = 1{,}618\ldots\ldots = \varphi$$



Y así sucesivamente. Además podemos ver otra curiosa cualidad de esta espiral:

Para la construir esta espiral partimos desde un pequeño rectángulo áureo (de color rojo) y ayudándonos de arcos iremos construyendo cuadrados, que en conjunto se irán formando otros **rectángulos áureos**.

De esta forma los arcos trazados constituyen una espiral logarítmica.



Además, podemos observar cómo los elementos de la sucesión o serie de Fibonacci aparecen reflejados proporcionalmente a las unidades de medida que hayamos usado para la construcción de la espiral.

En la imagen de la izquierda lo puedes ver mucho mejor.

¿Qué secreta relación habrá entre el número áureo y la sucesión o serie de Fibonacci? En el siguiente apartado tienes la respuesta, que está en… los conejos.

Los conejos, la sucesión de Fibonacci y el número de oro

Veamos cómo los conejitos de Fibonacci nos llevan hasta phi.

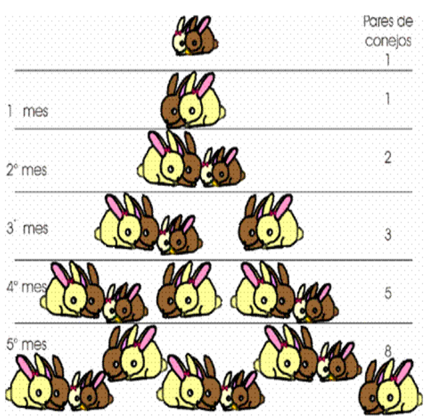
Supongamos que...

Supongamos que tenemos una pareja de conejos recién nacidos, deberán esperar un mes para poder reproducirse, teniendo una nueva pareja de conejitos, así al cabo de dos meses serán dos las parejas: la inicial y la pequeñita.

En el tercer mes la primera pareja se vuelve a reproducir, teniendo una nueva parejita, los pequeños no se reproducen porque aún deben madurar.

En el cuarto mes ya hay dos parejas reproductivas y una inmadura, en total cinco.

Si seguimos la misma pauta aparecerá los números que conforman la serie de Fibonacci, observa la siguiente imagen y la tabla donde recogemos la información de más meses:

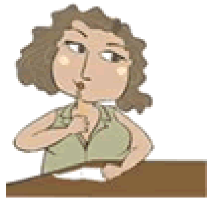


Fin del mes	Parejas de conejos		
	recién nacidos	adultos	Total
0	1	0	**1**
1	0	1	**1**
2	1	1	**2**
3	1	2	**3**
4	2	3	**5**
5	3	5	**8**
6	5	8	**13**

Fin del mes	Parejas de conejos		
	recién nacidos	adultos	Total
7	8	13	**21**
8	13	21	**34**
9	21	34	**55**
10	34	55	**89**
11	55	89	**144**
12	89	144	**233**
13	144	233	**377**

Jugando con los términos de la sucesión de Fibonacci (que coinciden, como puedes observar con el total de pares de conejos) se obtendría una curiosa propiedad:

Al dividir un término entre el anterior se va obteniendo un cociente que cada vez se aproxima más y más al número de oro



Puedes verlo en esta tabla:

(Tomamos como valor aproximado de phi con una precisión de diez cifras decimales al número **1,6180339887**)

Muy importante:

Jamás podremos escribir con cifras el valor de phi al ser un **número irracional**, es decir, **un número con infinitas cifras decimales no periódicas**.

Por tanto **cualquier valor que tomemos para phi no será más que una aproximación**.

Otros números irracionales famosos serían π, e, √2, etc...

Cociente	Diferencia en valor absoluto con phi	Cifras de aproximación a phi
1 : 1 = 1	0,61803398 ...	0
2 : 1 = 2	0,38196601 ...	0
3 : 2 = 1,5	0,11803398 ...	0
5 : 3 = 1, 66666666 ...	0,04863267 ...	1
8 : 5 = 1,6	0,01803398 ...	1
13 : 8 = 1, 625	0,00696601 ...	2
21 : 13 = 1,61538461...	0,00264937 ...	2
34 : 21 = 1,61904776 ...	0,00101363 ...	2
55 : 34 = 1,61764705 ...	0,00038692....	3

Cuanto más prolonguemos esta tabla, veremos como el cociente está cada vez más próximo al valor de las primeras cifras decimales de phi. Los matemáticos tienen una forma peculiar de transcribir esta propiedad, sería algo así:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

No te preocupes, es extraño pero sencillo de comprender, significaría que si seguimos dividiendo cada término de esta sucesión entre el anterior hasta el infinito (bueno, lo más que podamos), llegaremos al valor exacto de phi. Esto es lo que se llama un **límite en el infinito**...... pero calma, no te lo pediremos... ¿o sí?...

Comprueba que lo has entendido

3. ¿Cuál es el valor del cociente, con diez cifras decimales, entre los términos vigésimo primero y vigésimo de la sucesión de Fibonacci? ¿A cuántas cifras decimales de phi nos aproximaremos?
   a. 10946 : 6765 = 1,6180339985; aproximación a 7 cifras decimales de phi.
   b. 10477 : 6475 = 1,6180694980; aproximación a 4 cifras decimales de phi.
   c. 10477 : 6475 = 1,6180694980; aproximación a 5 cifras decimales de phi.

Para saber más...

En el apartado de recursos del tema puedes ver el recurso "***Armonía natural***" en el que tienes otros ejemplos de cómo, en muchos casos, la Naturaleza se comporta como un perfecto geómetra.

Creando con phi

Iccanobif y Nietsnie se dieron cuenta de lo relacionado que está phi con el arte de los humanos.

Se sorprendieron al descubrir que ya desde unas de las épocas más antiguas de la historia de este curioso planeta, el llamado antiguo Egipto, se trabajaba siguiendo las pautas de la proporción áurea.

Prueba de ello eran las famosas y misteriosas **pirámides**.

Posteriormente se le puso nombre propio al uso de esta proporción de forma reiterativa, Fidias y la Acrópolis de Atenas eran, más que un homenaje a los dioses, un homenaje a la razón.... a la razón áurea.

Pero les intrigó aún más un "loco" de la divina proporción, uno de los mayores sabios de la historia humana, el gran **Leonardo da Vinci**. Él era un ejemplo de unión de ciencia, arte, invención, él era Phi con mayúsculas.

Pero no todo acababa ahí, aún en el arte abstracto, en las construcciones contemporáneas volvía a aparecer una y otra vez esta proporción.

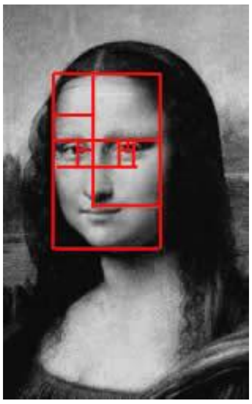
Un ejemplo serían los cuadros de un tal **Mondrian**, un homenaje a la proporción áurea, un ejemplo de bella y estudiada "simplicidad".

Volvamos a nuestros ejemplos, primero uno arquitectónico: **el Partenón**. Todo él está repleto de la proporción áurea.

Este edificio, hoy en forma de "ruinas" es uno de los más imita dos a lo largo de la historia, ejemplo de equilibrio, sobriedad y grandeza arquitectónica.

En la siguiente imagen se muestran algunos de los rectángulos áureos que esconde entre sus viejas piedras:

¿No recuerda a la forma matemática del Nautilus, la espiral?



El otro ejemplo era el cuadro de la Gioconda o Mona Lisa de Leonardo da Vinci, quizá uno de los mayores tesoros del Museo del Louvre (Paris). Su rostro, s u misteriosa sonrisa, su mirada, todo está envuelto en una serie de rectángulos áureos.

Un claro ejemplo de "estudiada naturalidad". Si pinchas en la imagen de la derecha podrás verla mejor.

¿Cómo se podía construir un rectángulo áureo? ¿Cómo se podía saber que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$?

Para saber el proceso completo, observa atentamente la presentación titulada "***Construyendo phi***" que encontrarás en el apartado de recursos audiovisuales del tema.

Comprueba que lo has entendido

4. En la presentación hemos visto que para descubrir el valor de phi es necesario el Teorema de Pitágoras, otro de los grandes matemáticos relacionado íntimamente con la proporción áurea. Vamos a ver si te has enterado bien, contestando a la siguiente cuestión:

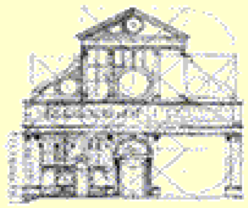
¿Cuál es el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden respectivamente 3 cm y 4 cm?

a. 7 cm.
b. 25 cm.
c. 5 cm.

En el apartado de recursos audiovisuales del tema puedes ver una presentación titulada "***Arte áureo***" en la que te mostramos otros ejemplos de obras artísticas de distintas épocas cuya composición se basa en la proporción áurea.

La unión entre Arte y Matemáticas no sólo se basa en la proporción áurea, existen infinidad de ejemplos que llevarían años de estudio.

En Andalucía se encuentran dos ejemplos de interés y belleza sin igual, la **Proporción cordobesa** y los **frisos y mosaicos de la Alhambra de Granada**.

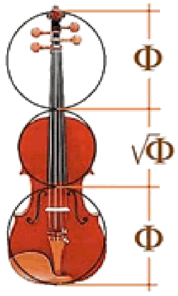


Para saber más

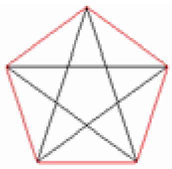
En el enlace "***La proporción cordobesa***" que encontrarás en el apartado de recursos web del tema tienes una completa información sobre la misma. Si te gusta el tema puedes seguir navegando por esta misma unidad didáctica y descubrirás un poco más sobre la relación entre el Arte y las Matemáticas.

Y si te pica la curiosidad, no dejes de ver el vídeo de la serie "Más por menos" del apartado de audiovisuales. Está dedicado a los mosaicos de la Alhambra y su relación con las Matemáticas.

Se titula "***Mosaicos y matemáticas***".



También se quedaron maravillados al descubrir la proporción áurea en el violín, ¿magia?... no. La música, los instrumentos musicales y las matemáticas están íntimamente ligados, de ello la primera escala musical, "pentatónica" fue un invento pitagórico... ¿Os suena el término pentagrama...?



Las "efes" de los violines están colocadas siguiendo la razón áurea. Las sonatas de **Mozart**, la Quinta de **Beethoven**, **Debussy**, etc., tienen relación con la proporción áurea.

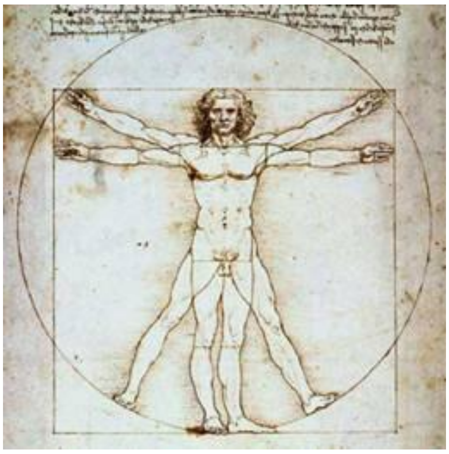
Para saber más

Las relaciones entre los instrumentos musicales, las composiciones musicales y la proporción áurea son muy interesantes. En el enlace "***El número de oro en los instrumentos de cuerda***" (que está en el apartado de páginas web de los recursos del tema, encontrarás la proporción áurea en distintos instrumentos musicales.

Y en el apartado de audiovisuales, el mismísimo pato Donald te explicará en un vídeo como se construye la escala pentatónica:

"***El Pato Donald en el País de las Matemágicas".***

El secreto de phi



El ser humano tiene tendencia a sentirse el centro del Universo, lo más bello para ellos y ellas es otro ser humano, ¿o no se ha estado nunca enamorado o enamorada? Además son a la vez creación y creadores, y tienden a hacer las cosas a "su imagen y semejanza", y ¿cuál es su imagen y semejanza?... desde luego su semejanza es la proporción áurea.

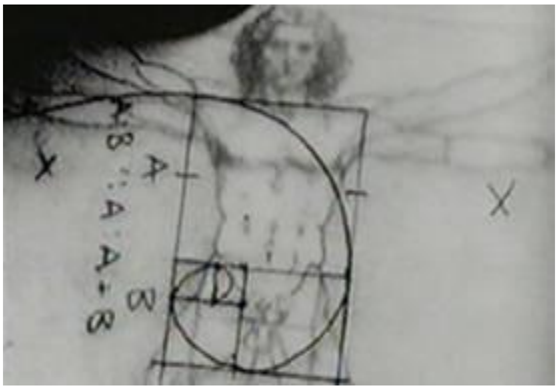
Observa la imagen de la izquierda, es el conocido como "**Hombre de Vitrubio**" de Leonardo da Vinci.

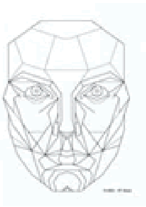
Se trata de un estudio de las proporciones del cuerpo humano, realizado a partir de los textos del arquitecto de la antigua Roma, Vitrubio, del que el dibujo toma su nombre.

El cuadrado está centrado en los genitales, y el círculo en el ombligo. La relación entre el lado del cuadrado y el radio del círculo es la **razón áurea**.

Para Vitrubio el cuerpo humano está dividido en dos mitades por los órganos sexuales, mientras que el **ombligo** determina la sección áurea. En el recién nacido, el ombligo ocupa una posición media y con el crecimiento *migra* hasta su posición definitiva en el adulto.

El dibujo también es a menudo considerado como un símbolo de la simetría básica del cuerpo humano y, por extensión, del Universo en su conjunto.





De acuerdo con las notas del propio Leonardo, en el Hombre de Vitrubio se dan otras relaciones, como puedes ver en el documento "***Proporciones humanas***", que encontrarás en el apartado de documentación del tema.

Conclusión: Existiría una razón "científica" que explicaría porque los humanos prefieren al hombre de la primera foto antes que al de la segunda:

Desde luego phi se merece hasta una bella poesía... y la tiene.

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.
A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.
A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

Rafael Alberti

Conociendo ya el "secreto de phi" no es de extrañar que la proporción áurea impregne muchos de los **diseños** de los objetos creados por los humanos, desde la forma de un **coche**, de una **ventana**, de un **libro**, de un **pupitre**, la clásica **calculadora**, de cómo se ha construir **una habitación** para que el sonido sea perfecto en ella, un **Ipod**...

...hasta algo muy importante, desgraciadamente para todos, cuando llegamos a fin de mes: la **tarjeta de crédito**, la **billetera** y el **DNI**.

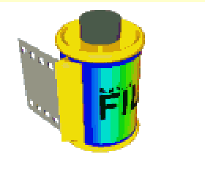
En la **arquitectura** y el **diseño** de mediados del siglo XX, surgió un sistema denominado "**Modulor**" ideado por el arquitecto **Le Corbusier**.

La idea principal era que el diseño debía estar a "escala humana", es decir, manteniendo las proporciones áureas.

Si deseas saber un poco más sobre este método, disfruta con el documento (que tienes en el apartado de documentación del tema) titulado "***Modulor***".

Comprueba que lo has entendido

5. Imagina que tienes que deseas que una imagen tenga forma de rectángulo áureo. Sabemos que la altura del rectángulo tiene de medida 450 píxeles, ¿Qué medida, aproximadamente, deberías darle a la base del rectángulo?
   a. 728 píxeles.
   b. 800 píxeles.
   c. 740 píxeles.



Para repasar, afianzar y disfrutar

En los siguientes vídeos, el profesor Don Antonio Pérez, nos hace un repaso general de todo el tema. Por favor, es muy importante que los veas de principio a fin, es una autentica clase magistral. Los puedes encontrar en el apartado de recursos audiovisuales del tema: ***"Más por menos. El número áureo (1 y 2)".***

Comprueba que lo has entendido (soluciones)

1. La respuesta adecuada es la b. Cada término se obtiene sumando los dos anteriores, por tanto: 13+21=**34** y 21+34=**55**, los números buscados son 34 y 55.
2. La respuesta correcta es la a. Puedes ver la explicación de porqué en la presentación "***Relación entre el lado y la diagonal en un pentágono regular***" que encontrarás en los recursos audiovisuales del tema.
3. La respuesta correcta es la a. En la respuesta b, el cociente está bien, la aproximación también... pero los términos de la sucesión no son estos. Los términos correctos son, el vigésimo primero 10946 y el vigésimo 6765. En la respuesta c, el cociente es lo único que está bien, la aproximación no es la correcta y tampoco se han usado los términos correctos.
4. La respuesta correcta es la c. Para obtenerla debes sumar el valor del cuadrado de los catetos, es decir, 3x3=9 y 4x4=16, dando como resultado 25 y después, el valor de la hipotenusa será la raíz cuadrada de 25 o lo que es lo mismo 5.
5. La respuesta correcta es la a. Se trataba solo de multiplicar 450 por 1,618 (aproximadamente el número de oro) y así obtener la solución aproximada: 728 pixeles.